Лекция 6

2. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка

Пусть, как и выше, D ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\vec{x} \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in D$, $u \in U$, $\Omega = D \times U$, U некоторый интервал из $\mathbb{R}^1$.

Опр. 5. 9. Квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка называется уравнение

$$L(u) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x_1, \ldots, x_n, u); \qquad (9)$$

при этом предполагается, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2(\vec{x}, u) > 0 \quad \forall (\vec{x}, u) \in \Omega$.

Будем также предполагать, что функции $a_i(\vec{x}, u)$, $i = 1, \ldots, n$ и $b(\vec{x}, u) \in C^1(\Omega)$ заданные функции.

Опр. 5. 10. Решением уравнения (9) **в области** D будем называть функцию $u(\vec{x}) \in C^1(D)$, обращающую это уравнение в верное равенство в каждой точке $\vec{x} \in D$.

Геометрически решение уравнения (9) представляет собой поверхность в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $(\vec{x}, u)$.

Сопоставим квазилинейному уравнению (9) следующее линейное однородное уравнение

Пусть, как и выше, D ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\vec{x} \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in D$, $u \in U$, $\Omega = D \times U$, U некоторый интервал из $\mathbb{R}^1$.

Опр. 9. Квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка называется уравнение

$$L(u) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x_1, \ldots, x_n, u); \qquad (9)$$

при этом предполагается, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2(\vec{x}, u) > 0 \quad \forall (\vec{x}, u) \in \Omega$.

Будем также предполагать, что функции $a_i(\vec{x}, u)$, $i = 1, \ldots, n$ и $b(\vec{x}, u) \in C^1(\Omega)$ заданные функции.

Опр. 10. Решением уравнения (9) **в области** D будем называть функцию $u(\vec{x}) \in C^1(D)$, обращающую это уравнение в верное равенство в каждой точке $\vec{x} \in D$.

Геометрически решение уравнения (9) представляет собой поверхность в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $(\vec{x}, u)$.

Сопоставим квазилинейному уравнению (9) следующее линейное однородное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u\big)\frac{\partial v}{\partial x_i} + b\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ v\big)\frac{\partial v}{\partial u} = 0. \tag{10}$$

Связь между этими уравнениями определяется следующей теоремой.

Теорема 5. 13.
Пусть $v = V\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u\big)$ – *решение уравнения* (10)*; пусть точка* $Q^0 = \big(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ u^0\big)$ *такова, что*

$$\left.\frac{\partial V}{\partial u}\right|_{Q^0} \neq 0, \qquad V\left(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ u^0\right) = 0.$$

В этом случае в силу теоремы о неявной функции соотношение

$$V\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u\big) = 0 \tag{11}$$

определяет в окрестности Q^0 *некоторую функцию* $u = \varphi(x)$.

Тогда утверждается, что функция $u = \varphi(x)$ *является решением уравнения* (9) *в окрестности точки* $P^0 = \big(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0\big)$.

Доказательство. Пусть $u = \varphi(x)$ решение функционального уравнения (11). Тогда в силу теоремы о неявной функции

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial V\left(\vec{x},\,u\right)}{\partial x_i}}{\frac{\partial V\left(\vec{x},\,u\right)}{\partial u}}.$$

Подставляя эти выражения в левую часть уравнения (9), получим

$$L(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} a_i\big(\vec{x},\ \varphi\big)\frac{\frac{\partial V\left(\vec{x},\,u\right)}{\partial x_i}}{\frac{\partial V\left(\vec{x},\,u\right)}{\partial u}}. \tag{12}$$

Но $V\big(\vec{x},\ u\big)$ решение уравнения (10) (для всех u, в том числе и для $u\varphi(\vec{x})$). Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\big(\vec{x},\ \varphi\big)\frac{\partial V\big(\vec{x},\ u\big)}{\partial x_i} = -b\big(\vec{x},\ \varphi\big)\frac{\partial V\big(\vec{x},\ u\big)}{\partial u},$$

т.е.

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i\big(\vec{x},\ \varphi\big)\frac{\frac{\partial V\left(\vec{x},\,u\right)}{\partial x_i}}{\frac{\partial V\left(\vec{x},\,u\right)}{\partial u}} = b\big(\vec{x},\ \varphi\big),$$

поэтому из (12) следует, что

$$L(\varphi) = b(\vec{x},\, \varphi),$$

что и означает выполнение уравнения (9) для функции $\varphi(\vec{x})$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 8. Уравнение (10) соответствует автономной системе ОДУ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(\vec{x},\, u), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = a_n(\vec{x},\, u), \\ \dot{u} = b(\vec{x},\, u), \end{cases} \tag{13}$$

которую в симметричной форме можно записать в виде

$$\frac{dx_1}{a_1(\vec{x},\, u)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(\vec{x},\, u)} = \frac{du}{b(\vec{x},\, u)}. \tag{14}$$

Опр. 11. Система (13) (или в симметричной форме записи (14)) называется **характеристической системой для квазилинейного уравнения** (9). Фазовые траектории системы (13) (или, что то же самое, интегральные кривые системы (14)) называются **характеристиками**.

Из теоремы 13 с учетом замечания 8 вытекает алгоритм нахождения решений уравнения (9).

Алгоритм решения квазилинейного уравнения

1) Записываем характеристическую систему (14).

2) Находим n независимых первых интегралов этой системы

$$\psi_1(\vec{x},\, u) = c_1, \quad \ldots, \quad \psi_n(\vec{x},\, u) = c_n.$$

3) Строим общий интеграл системы (14) в виде

$$v = V\left(\psi_1(\vec{x},\, u),\, \ldots,\, \psi_n(\vec{x},\, u)\right), \tag{15}$$

где $V(y_1,\, \ldots,\, y_n)$ произвольная функция класса C^1 от своих аргументов, причем $\frac{dV}{du} \neq 0$ в окрестности некоторой точки $Q^0 = (P^0,\, u^0)$.

В силу теоремы 9 формула (15) задает решение линейного уравнения (10).

4) Решение $u(\vec{x})$ уравнения (9) в окрестности точки P^0 находим по теореме о неявной функции как решение функционального уравнения

$$V\left(\psi_1(\vec{x},\, u),\, \ldots,\, \psi_n(\vec{x},\, u)\right) = 0. \tag{16}$$

Замечание 9. Вообще говоря, не исключена возможность существования решений $u = \varphi^*(\vec{x})$ уравнения (9), которые не получаются из формулы (16), поскольку условия теоремы 13 являются только достаточными для существования решений уравнения (9) и не являются необходимыми.

Такие решения могут существовать. Они называются **специальными решениями**, но мы их рассматривать не будем.

Поэтому решение, получаемое из формулы (16), будем называть **общим решением** уравнения (9) (в окрестности точки P^0).

Замечание 10. При построении первых интегралов системы (14) в ряде случаев может оказаться, что переменная u войдет только в один из них:

$$\psi_1(x) = c_1,\ \ldots,\ \psi_{n-1}(x) = c_{n-1},\ \psi_n(x,\, u) = c_n.$$

Тогда общее решение будет находиться из соотношения

$$V\big(\psi_1(x),\, \ldots,\, \psi_{n-1}(x),\, \psi_n(x,\, u)\big) = 0,$$

которое можно по теореме о неявной функции переписать в виде

$$\psi_n(x,\, u) = f\left(\psi_1(\vec{x},\, u),\, \ldots,\, \psi_{n-1}(x)\right). \tag{17}$$

Разрешив равенство (17) относительно u, мы получим общее решение уравнения (9) в явном виде.

В частности, однородное линейное уравнение (1) можно рассматривать как частный случай уравнения (9).

Характеристическая система (14) запишется в этом случае в виде

$$\frac{dx_1}{a_1(x)} = \ \ldots\ = \frac{dx_n}{a_n(x)} = \frac{du}{0}.$$

Система из n независимых первых интегралов может быть выбрана следующим образом

$$\psi_1(x) = c_1,\ \ldots,\ \psi_{n-1}(x) = c_{n-1},\ u = c_n.$$

Видим, что переменная u войдет только в последний первый интеграл. Решение уравнения может быть записано по формуле (17), которая в данном случае совпадает с формулой (3).

Замечание 11. Теорема 13 сводит решение квазилинейного уравнения к решению линейного уравнения, которое в соответствии с теоремой 5. 10

решалось локально в окрестности некоторой точки.

Таким образом, мы можем гарантировать разрешимость уравнения (9) тоже только локально, хотя реально полученное решение может существовать и глобально.

Пример 4. Решим уравнение

$$x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1 - x_2.$$

Характеристическая система имеет вид

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{du}{x_1 - x_2}.$$

Первое равенство

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_1}$$

перепишется в виде $x_1 dx_1 = x_2 dx_2$ и приводит к первому интегралу

$$x_1^2 - x_2^2 = c_1.$$

Для получения другого первого интеграла воспользуемся свойством сложения пропорций:

$$\frac{d\big(x_2 - x_1\big)}{x_1 - x_2} = \frac{du}{x_1 - x_2},$$

откуда получаем первый интеграл

$$u + x_1 - x_2 = c_2.$$

Поскольку u входит только в один из полученных первых интегралов, то получаем решение уравнения в явном виде

$$u = x_2 - x_1 + f\big(x_1^2 - x_2^2\big),$$

функция $f(y)$ произвольная функция класса C^1.

Пример 5. Решим уравнение

$$\big(x_2 + 2u^2\big) \frac{\partial u}{\partial x_1} - 2x_1^2 u \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1^2.$$

Характеристическая система запишется в виде

$$\frac{dx_1}{x_2 + 2u^2} = \frac{dx_2}{-2x_1^2 u} = \frac{du}{x_1^2}.$$

Из второго соотношения имеем $dx_2 = -2u du$, откуда получаем первый интеграл

$$x_2 + u^2 = c_1. \tag{18}$$

Подставляя $x_2 = c_1 - u^2$ в соотношение $\frac{dx_1}{x_2+2u^2} = \frac{du}{x_1^2}$, получаем $\frac{dx_1}{c_1+u^2} = \frac{du}{x_1^2}$, откуда $x_1^2\, dx_1 = \big(c_1 + u^2\big)du$, а следовательно,

$$\frac{x_1^3}{3} = c_1 u + \frac{u^3}{3} + c_2.$$

Подставляя сюда c_1 из (18), получаем еще один первый интеграл

$$x_1^3 - 3\big(x_2 + u^2\big)u - u^3 = c_2.$$

Тогда общее решение уравнения запишется в неявном виде

$$V\left(x_2 + u^2,\ x_1^3 - 3\big(x_2 + u^2\big)u - u^3\right) = 0,$$

где функция $V\big(y_1,\ y_2\big)$ произвольная функция класса C^1 и такая, что

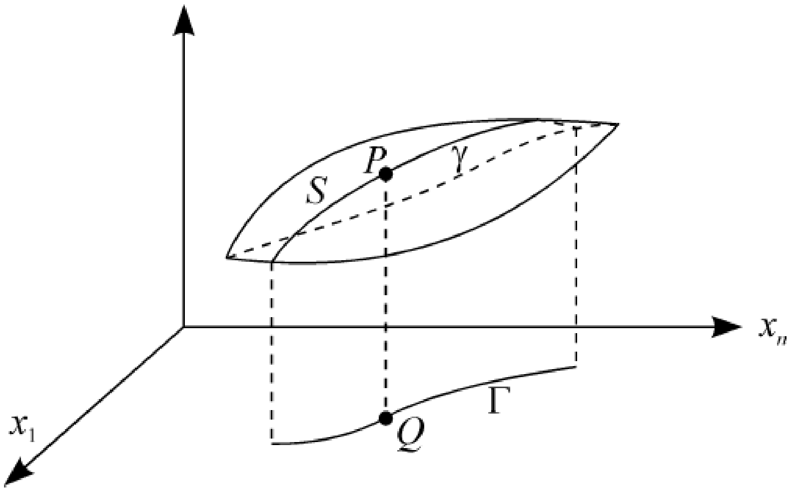
$$\frac{\partial V\left(x_2 + u^2,\ x_1^3 - 3\big(x_2 + u^2\big)u - u^3\right)}{\partial u} \neq 0.$$

Следующие две теоремы объясняют геометрический смысл характеристик квазилинейного уравнения (9).

Теорема 14.
Всякая интегральная поверхность $u = \varphi\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big)$ уравнения (9) (график решения этого уравнения) состоит из характеристик в том смысле, что через каждую точку этой поверхности проходит характеристика, целиком лежащая на этой поверхности.

Доказательство. Обозначим интегральную поверхность $u = \varphi\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big)$ через S. Пусть $P \equiv (x,\ u)$ произвольная точка этой поверхности; обозначим через Q проекцию точки P на гиперплоскость переменных $\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big)$ см. рис. 3.

Рассмотрим систему ОДУ вида



(19)

Рис. 3. Интегральная поверхность.

Эта система определяет интегральные кривые (решения системы) в пространстве $\mathbb{R}^n$ переменных $(x_1, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим интегральную кривую Γ, проходящую через точку Q (рис. 3.). Пусть в параметрической форме она задается уравнениями

$$x_i = x_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных (x, u) ей будет соответствовать кривая γ, проходящая через точку P и лежащая на поверхности S (см. рис. 3.). Тогда γ задается уравнениями

$$\begin{cases} x_i = x_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \\ u = \varphi\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big). \end{cases} \tag{20}$$

Покажем, что кривая γ является характеристикой, т.е. функции $(x_1, \ldots, x_n, u)$ из (20) удовлетворяют характеристической системе (13).

В силу соотношений (19) первые n уравнений системы (13), очевидно, удовлетворяются. Осталось проверить выполнение последнего, $(n+1)$-го уравнения.

Имеем

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\, \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\, a_i\left(x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n)\right). \tag{21}$$

Но функция $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ по условию является решением уравнения (9), поэтому последняя сумма в соотношении (21) равна $b\left(x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n)\right)$. Таким образом,

$$\frac{du}{dt} = b\left(x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n)\right) \equiv b(x_1, \ldots, x_n, u),$$

т.е. и последнее уравнение системы (13) выполнено. Теорема доказана. □

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 15.
Если поверхность S, задаваемая функцией $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, (где $\varphi(x)$ – функция класса C^1 своих аргументов) состоит из характеристик уравнения (9), то функция $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ является решением уравнения (9).

Доказательство. Пусть γ характеристика уравнения (9), задаваемая параметрически в виде

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ \dots\dots\dots \\ x_n = x_n(t) \\ u = u(t). \end{cases}$$

Тогда по определению характеристики функции $x_1(t), \ \dots, \ x_n(t), \ u(t)$ удовлетворяют системе (13), а следовательно,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x,\, u) \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = a_n(x,\, u) \\ \dot{u} = b(x,\, u). \end{cases}$$

Но тогда касательный вектор τ к кривой γ в точке $P = (x,\ u)$ имеет вид

$$\tau = \big(a_1(x,\, u),\ \dots,\ a_n(x,\, u),\ b(x,\, u)\big).$$

С другой стороны, вектор нормали N к поверхности S в точке $(x,\, u)$ имеет вид

$$N = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\ \dots,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n},\ -1\right).$$

Скалярное произведение $\big(\tau,\ N\big) = 0$, поэтому имеем соотношение

$$a_1(x,\, u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \ldots + \vec{a}_n(x,\, u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} - b(x,\, u) = 0,$$

которое означает, что функция $u = \varphi\big(x_1,\ \dots,\ x_n\big)$ удовлетворяет уравнению (9). □

Замечание 12. Из доказанных теорем вытекает геометрическое построение решения уравнения (9):

1) n независимых первых интегралов характеристической системы (13) можно рассматривать как n-параметрическое семейство характеристик

$$\begin{cases} \psi_1\big(x_1\ \dots,\ x_n,\ u\big) = c_1 \\ \dots\dots\dots \\ \psi_n\big(x_1\ \dots,\ x_n,\ u\big) = c_n, \end{cases}$$

зависящих от n параметров $c_1,\ \dots,\ c_n,$ и заполняющих некоторую область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $\big(x_1\ \dots,\ x_n,\ u\big)$.

2) Наша задача «склеить» из этих характеристик гладкую поверхность, которая будет тогда интегральной поверхностью уравнения (9).

3) Чтобы это сделать, наложим на параметры $c_1, \ \ldots, \ c_n$ гладкую связь:

$$V(c_1, \ \ldots, \ c_n) = 0. \tag{22}$$

4) Подставляя в (22) первые интегралы характеристической системы, как раз и придем к формуле (16), задающей общее решение уравнения (9).

4.Задача Коши для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка

Для простоты формулировок рассмотрим случай $n = 2$.

Тогда уравнение (9) можно записать в виде

$$a_1(x, \ y, \ u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x, \ y, \ u)\frac{\partial u}{\partial x_2} = b(x, \ y, \ u), \qquad (x, \ y, \ u) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3. \tag{23}$$

Опр. 12. Задача Коши для уравнения (23) состоит в нахождении интегральной поверхности $u = \varphi(x, \ y)$ (решения уравнения (23)), проходящей через заданную линию L, которая параметрически задана в виде

$$\begin{cases} x = x^*(t) \\ y = y^*(t) \\ u = u^*(t). \end{cases} \tag{24}$$

Опишем, как решается задача Коши (23), (24). Из результатов предыдущего параграфа вытекает, что общее решение уравнения (23) может быть записано как неявная функция $u(x, \ y)$, получаемая из уравнения

$$V\left(\psi_1(x, \ y, \ u), \ \psi_2(x, \ y, \ u)\right) = 0, \tag{25}$$

$$\text{где} \quad \psi_1(x, \ y, \ u) = c_1, \quad \psi_2(x, \ y, \ u) = c_2 \ - \tag{26}$$

два независимых первых интеграла характеристической системы.

Таким образом, соотношение (25) представляет собой связь $V(c_1, \ c_2) = 0$ на параметры $c_1, \ c_2$ (см. замечание 11 и, в частности, соотношение (22).

Чтобы решить задачу Коши, нам требуется выбрать такую связь (т.е. такую функцию V), чтобы соответствующее однопараметрическое семейство характеристик (образующее в силу результатов предыдущего параграфа искомую интегральную поверхность) пересекало бы кривую L.

Подставим соотношения (24) в (16):

$$\begin{cases} \psi_1\big(x^*(t),\ y^*(t),\ u^*(t)\big) = c_1 \\ \psi_2\big(x^*(t),\ y^*(t),\ u^*(t)\big) = c_1. \end{cases} \tag{27}$$

Очевидно, характеристики будут пересекать L тогда и только тогда, когда оба соотношения в (27) удовлетворяются при одних и тех же t.

Исключая t из (27) (если это возможно), мы получаем искомую связь на параметры c_1, c_2:

$$V^*\left(c_1,\ c_2\right) = 0. \tag{28}$$

Подставляя в (28) первые интегралы из (26), получаем искомое решение задачи Коши:

$$V^*\left(\psi_1\big(x,\ y,\ u\big),\ \psi_2\big(x,\ y,\ u\big)\right) = 0. \tag{29}$$

Действительно, формула (29) задает решение уравнения (23) в силу теоремы 13.

С другой стороны, в силу (27) и (28)

$$V^*\left(\psi_1\big(x^*(t),\ y^*(t),\ u^*(t)\big),\ \psi_2\big(x^*(t),\ y^*(t),\ u^*(t)\big)\right) = 0,$$

следовательно, интегральная поверхность, задаваемая соотношениями (29), проходит через линию L.

Замечание 13. Если линия L сама является характеристикой, то по определению первого интеграла соотношения (27) выполняются тождественно для любого t, т.е. t из (27) исключить нельзя.

В этом случае задача Коши поставлена некорректно, поскольку имеется много решений задачи Коши (23), (24).

Геометрически это тоже понятно, поскольку в этом случае все характеристики, «выпущенные» из точек на L, совпадают с L и не будут образовывать никакой определенной интегральной поверхности см. рис. 4..

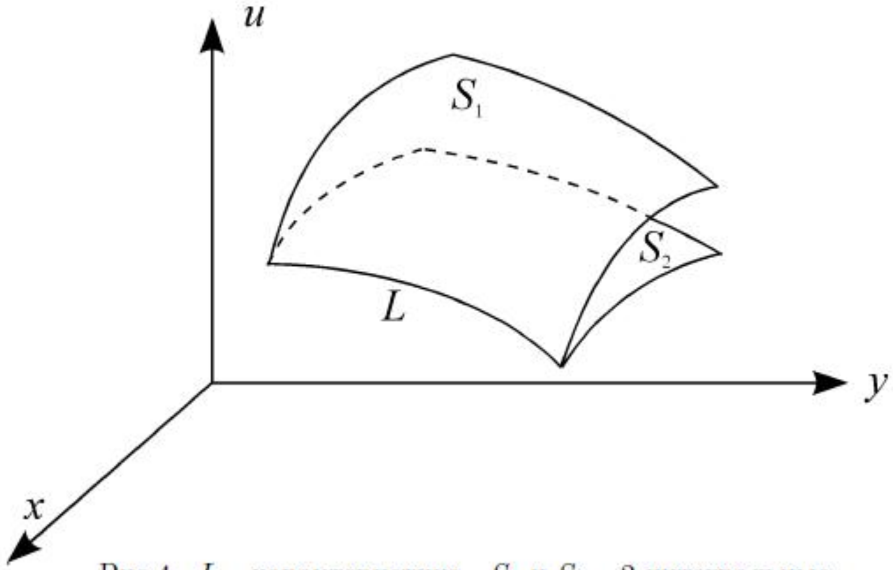


Рис.4. L – характеристика, S_1 и S_2 – 2 интегральные поверхности, проходящие через L.

Пример 6. Требуется найти решение задачи Коши для уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u^2 - x^2 - y^2, \tag{30}$$

проходящее через линию L

$$u = 2x - x^2, \qquad y = 1 - x. \tag{31}$$

Характеристическая система для уравнения (30) имеет вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u^2 - x^2 - y^2}. \tag{32}$$

Из первого соотношения находим первый интеграл в виде

$$\frac{y}{x} = c_1. \tag{33}$$

Чтобы найти другой первый интеграл, воспользуемся свойством сложения пропорций:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u^2 - x^2 - y^2} = \frac{2x\,dx}{2x^2} = \frac{2y\,dy}{2y^2} = \frac{du + 2x\,dx + 2y\,dy}{u + x^2 + y^2} = \\ = \frac{du + dx^2 + dy^2}{u + x^2 + y^2} = \frac{d\left(u + x^2 + y^2\right)}{u + x^2 + y^2},$$

откуда имеем

$$\frac{u + x^2 + y^2}{x} = c_2. \tag{34}$$

Общее решение уравнения (30) можно теперь записать в виде (см. замечание 10)

$$\frac{u + x^2 + y^2}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{или}$$

$$u = -x^2 - y^2 + xf\left(\frac{y}{x}\right) \qquad f \in C^1 \ - \text{ произвольная функция.}$$

Чтобы решить задачу Коши, подставим в первые интегралы (33) и (34) соотношение (31). Имеем:

$$\frac{1-x}{x} = c_1, \qquad \frac{2x - x^2 + x^2 + (1-x)^2}{x} = c_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1+x^2}{x} = c_2.$$

Исключим здесь x и установим соотношение между c_1 и c_2:
из первого равенства $x = \frac{1}{1+c_1}$; подставив во второе равенство, получим

$$1 + c_1 + \frac{1}{1+c_1} = c_2.$$

Подставляя сюда вместо c_1 и c_2 первые интегралы из (33) и (34), получаем искомое решение задачи Коши:

$$1 + \frac{y}{x} + \frac{1}{1+\frac{y}{x}} = \frac{u + x^2 + y^2}{x}$$

или после преобразований

$$u = -x^2 - y^2 + x + y + \frac{x^2}{x+y}.$$